

Lect 4 Exercise

今日のテーマ

1. 同値関係, 2. 同値類, 3. 商集合

4-1. 集合 X の同値関係 \sim に対して以下の問いに答えよ.

(1) \sim が同値関係であること条件 (反射則, 対称則, 推移則) を述べよ.

(2) 同値類および商集合 X/\sim の定義を述べよ.

4-2. 整数全体の集合 \mathbb{Z} の元 a, b に対して, 関係 \sim を以下で定める.

$$a \sim b \iff a - b \text{ は } 4 \text{ の倍数.}$$

(1) \sim は \mathbb{Z} の同値関係になることを示せ.

(2) 以下の文章の正誤を述べよ.

(a) $\overline{-2}$ は 2 の同値類である. (b) $\overline{5}$ は -1 の同値類である.

(3) 商集合 \mathbb{Z}/\sim を具体的に書け.

4-3. 実数全体の集合 \mathbb{R} に対して, 関係 \sim を以下で定めるとき \sim が同値関係になるかどうかを調べよ.

(1) $a \sim b \iff a - b$ は有理数.

(2) $a \sim b \iff a - b$ は無理数.

(3) $a \sim b \iff a - b$ は無理数または 0.

4-4. 集合 X の同値関係 \sim に対して, 以下のことを示せ. ((2) は (1) とは独立に示せ.)

(1) $x \sim y \iff \bar{x} = \bar{y}$.

(2) $x \sim y \iff \bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$.

(裏に解答例あり)

解答例

4-2. 反射則: $a - a = 0 = 4 \cdot 0$. よって, $a \sim a$.

対称則: $a \sim b$ とする. このとき, $a - b = 4m$, $m \in \mathbb{Z}$ となる. すると, $b - a = -4m = 4(-m)$. よって, $b \sim a$.

推移則: $a \sim b$, $b \sim c$ とする.

このとき, $a - b = 4m$, $b - c = 4n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ となる. すると, $a - c = (a - b) + (b - c) = 4m + 4n = 4(m + n)$. よって, $a \sim c$.

4-3. 答えのみ書くと (1) なる. (2) ならない. (3) ならない.

(1) は講義でやった例. (2) は反射則をみたさないことがすぐわかる. (3) は推移則をみたさない反例を具体的に挙げよ.

3-6. (Exercise 3 の裏の解説の間違った証明例とよく比べよ. (一箇所のみ異なる.)

g は全射なので, 任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する.

また, f は全射なので, この $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

このとき, $g(f(x)) = g(y) = z$ となるので, $g \circ f$ は全射である.