Lect 3 Exercise

今日のテーマ
1. 写像, 2. 写像の合成, 3. 単射, 全射, 全単射

3-1. 写像 $f : X \to Y$ に対して, $A \subset X$ の像 $f(A)$ と $B \subset Y$ の逆像 $f^{-1}(B)$ の定義を述べよ.
3-2. 写像 $f : X \to Y$ に対して以下を示せ. (f が全単射, すなわち逆写像 f^{-1} を持つことは仮定しないことに注意せよ.)
(1) $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して,

$$f(A) \subset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset f^{-1}(B).$$

(2) $A, B \subset Y$ に対して,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

(3) $A, B \subset X$ に対して,

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

注: 一般に, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ は成り立たない.
3-3. 写像の列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ に対して, 以下を示せ.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

3-4. 写像 $f : A \to$ に対して, f が単射, 全射, 全単射であることの定義を述べよ. (講義にしたがって, いろいろな同値な定義を列挙せよ.)
3-5. 全単射 $f : X \to Y$ に対して,「f が全単射であることをどのように用いたかが明らかになるように」逆写像 $f^{-1} : Y \to X$ の定義を与えよ.
3-6. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して以下を示せ.
(1) f, g は単射 $\Longrightarrow$ $g \circ f$ は単射.
(2) f, g は全射 $\Longrightarrow$ $g \circ f$ は全射.
(3) f, g は全単射 $\Longrightarrow$ $g \circ f$ は全単射.

(裏あり)

解答例

3-2. (1) ($\Longrightarrow$) $f(A) \subset B$ とする. $x \in A$ とすると, $f(x) \in f(A)$. よって, 仮定より, $f(x) \in B$. すなわち, $x \in f^{-1}(B)$. 以上より, $A \in f^{-1}(B)$.

($\Longleftarrow$) $A \subset f^{-1}(B)$ とする. $y \in f(A)$ とすると, $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する. このとき, 仮定より, $x \in f^{-1}(B)$. すなわち, $f(x) \in B$. よって, $y \in B$. 以上より, $f(A) \subset B$.

解説: この問題は基本である. 用いていることは, 像 $f(A)$ と逆像 $f^{-1}(B)$ の定義だけである. この証明が理解できれば以下の問もできるし, 理解できなければ以下の問もできないであろう. まずは, この証明を良く理解し, 自分で証明を書けるようにしよう. (わかってしまえばムズカシクないですよ!)

(2) 「$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$」について.

$$
\begin{aligned}
x \in f^{-1}(A \cup B) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(x) \in A \cup B \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{「}f(x) \in A\text{」または「}f(x) \in B\text{」} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{「}x \in f^{-1}(A)\text{」または「}x \in f^{-1}(B)\text{」} \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)
\end{aligned}
$$

(3) 「$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$」について.

$$
\begin{aligned}
y \in f(A \cup B) \quad &\Longleftrightarrow \quad y = f(x) \text{ となる } x \in A \cup B \text{ が存在する} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{「}y = f(x) \text{ となる } x \in A \text{ が存在する」} \\
&\qquad \text{または「}y = f(x) \text{ となる } x \in B \text{ が存在する」} \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{(以下は自分で考えよ)}
\end{aligned}
$$

3-6. (1) $x, x' \in X$, $x \neq x'$ とする. このとき, f は単射なので, $f(x) \neq f(x')$. また, g は単射なので, $g(f(x)) \neq g(f(x'))$. よって, $g \circ f$ は単射.

(2) **(この問を自分でやった後にこのコメントを見よ.)**

以下の証明は正しくない (初学者に非常に良くおこる間違い). この証明の問題点を見つけ, 正しい証明に修正せよ.

証明. g は全射なので, 任意の $z \in Z$ に対して $g(y) = z$ となる $y \in Y$ が存在する.

また, f は全射なので, 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する.

このとき, $g(f(x)) = g(y) = z$ となるので, $g \circ f$ は全射である. $\square$