

Lect 10 Exercise

今日のテーマ: 1. 同形写像, 2. $\text{Im } f$ と $\text{Ker } f$

10-1. V, W をベクトル空間とする.

- (1) 写像 $f: V \rightarrow W$ が同形写像であることの定義を述べよ.
- (2) V と W が同形であることの定義を述べよ.

10-2. V をベクトル空間, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ を V の基底とする. このとき, この基底により定まる同形写像 $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ とはどのようなものか?

(注: Lect 10, Theorem 1 の証明で用いた同形写像のことである. 同形写像であることの証明は不要.)

10-3. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して, 以下を示せ. ただし, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V$ とする.

- (1) f が単射, かつ $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ が一次独立ならば, $f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n)$ は一次独立.
 - (2) f が全射, かつ $V = \langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rangle$ ならば, $W = \langle f(\vec{a}_1), \dots, f(\vec{a}_n) \rangle$.
- (注: Lect 10, Prop. 2 の証明がそのままあてはまる.)

10-4. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して, $\text{Im } f, \text{Ker } f$ の定義をそれぞれ述べよ.

10-5. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して, 以下を示せ.

- (1) $\text{Im } f$ は W の部分空間である.
- (2) $\text{Ker } f$ は V の部分空間である.

Lect 9 の講義ノートの訂正

Prop 4 の証明の途中 (下線部追加)

任意の $\vec{v} \in V$ は

$$\vec{v} = c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n$$

と 一意的に 表すことができる. よって, (Prop 3 より)

$$f(\vec{v}) = c_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c_n f(\vec{a}_n).$$

(以下略)

解説: 一意性は $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ の一次独立性よりわかる. (Lect 8 Prop 1)
もし一意性がないと

$$\begin{aligned} \vec{v} &= c_1 \vec{a}_1 + \dots + c_n \vec{a}_n \\ &= c'_1 \vec{a}_1 + \dots + c'_n \vec{a}_n \end{aligned}$$

と 2 通りで表したとき,

$$c_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c_n f(\vec{a}_n) = c'_1 f(\vec{a}_1) + \dots + c'_n f(\vec{a}_n)$$

となるとは限らないので, \vec{v} の像 $f(\vec{v})$ がうまく定まらない.