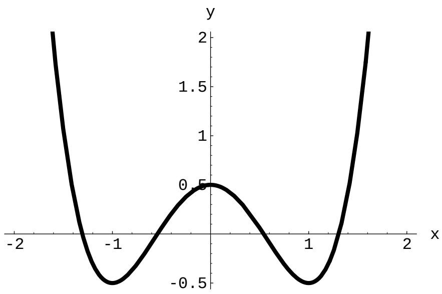
数学アゴラ
2008 年 8 月 7 日

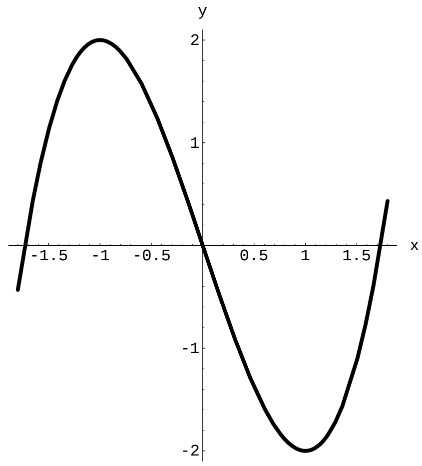
正多面体と群（２日目）

林孝宏

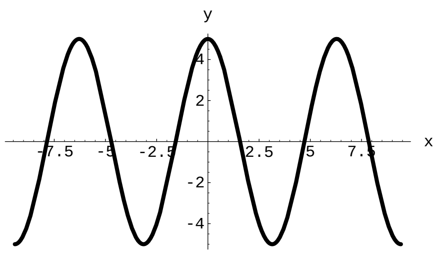
関数の対称性



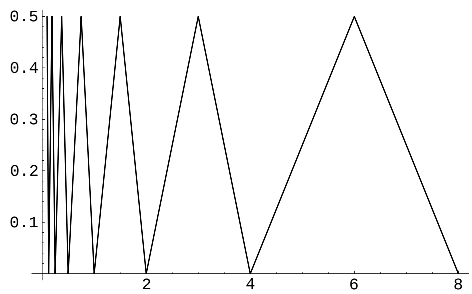
$y = x^4 - 2x^2 + 1/2$



$y = -3x + x^3$



$y = 5\cos x$



定義 $y = f(x)$ を関数とする。

f が $\boxed{\text{偶関数}} \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

f が $\boxed{\text{奇関数}} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

f が 周期 $a > 0$ の $\boxed{\text{周期関数}} \Leftrightarrow f(x - a) = f(x)$

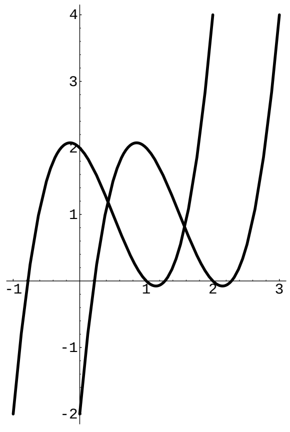
関数の変換

命題 $y = f(x)$ を関数とする。
（１） 関数 $y = f(-x)$ のグラフは元の関数のグラフを y-軸に関する鏡映像になる。
（２） a を定数とするとき、関数 $y = f(x-a)$ のグラフは元の関数のグラフを x-軸方向に a だけ平行移動したものになる。
（３） a を０でない定数とするとき、関数 $y = f(\frac{x}{a})$ のグラフは元の関数のグラフを y-軸を中心としてに a 倍だけ伸張したものになる。

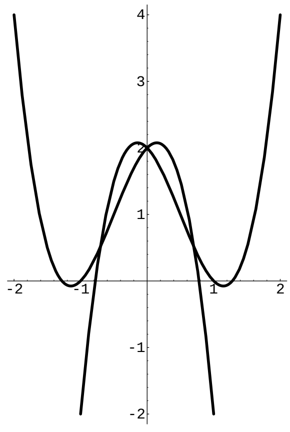
定義 （１） 関数 f に対し、上の（１）の方法で得られた関数を f の $\boxed{\text{鏡映変換}}$ と呼び、Rf で表す。
（２） 関数 f に対し、上の（２）の方法で得られた関数を f の $\boxed{\text{平行移動変換}}$ と呼び、$T_a f$ で表す。
（３）関数 f に対し、上の（３）の方法で得られた関数を f の $\boxed{\text{伸張変換}}$ と呼び、$S_a f$ で表す。
すなわち、

$$(Rf)(x) = f(-x), \qquad (T_a f)(x) = f(x-a),$$
$$(S_a f)(x) = f\left(\frac{x}{a}\right)$$

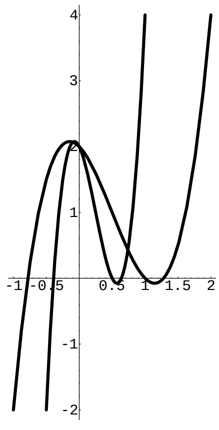
関数の変換の例 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 2$



$y = f(x-1)$



$y = f(-x)$



$y = f(2x)$

命題 （1）

f が偶関数 $\Leftrightarrow Rf = f$
f が奇関数 $\Leftrightarrow Rf = -f$
f が 周期 $a > 0$ の周期関数 $\Leftrightarrow T_a f = f$

（2）

$$(R(Rf))(x) = f(x),$$
$$(T_b(T_a f))(x) = (T_{a+b} f)(x), \qquad (S_b(S_a f))(x) = (S_{ab} f)(x)$$

このことを

$$R \times R = I,$$
$$T_b \times T_a = T_{a+b}, \qquad S_b \times S_a = S_{ab}$$

と表す。

定理 f が２次関数なら、$Rf, T_a f, S_a f$ も２次関数。 ３次関数についても同様なことがいえる。

証明 例えば、$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ に対し、

$$(Rf)(x) = f(-x) = 2x^2 + 3x + 1$$

□

♡ ズームチェンジとアナロジー

正６面体 P の頂点全体	１つの２次関数のグラフ上の点全体
正６面体の全体	２次関数の全体

多面体 P の１つの頂点 $\Leftrightarrow$ １つの２次関数
P の頂点の全体 $\Leftrightarrow$ ２次関数の全体
回転軸上の頂点 $\Leftrightarrow$ 偶関数である２次関数

２変数関数の対称性

対称性の例

$$xz\text{-平面に関する面対称} \Leftrightarrow f(x,-y) = f(x,y)$$
$$\text{平面}y = x\text{に関する面対称} \Leftrightarrow f(y,x) = f(x,y)$$

z軸に関する角度$45°$の回転対称

$$\Leftrightarrow f(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y) = f(x,y)$$

z軸に関する角度θの回転対称

$$\Leftrightarrow f((\cos\theta)x + (\sin\theta)y, -(\sin\theta)x + (\cos\theta)y) = f(x,y)$$

定義 $z = f(x,y)$ を２変数関数とする。

$$f \text{ が } \boxed{\text{対称関数}} \Leftrightarrow f(y,x) = f(x,y)$$
$$f \text{ が } \boxed{\text{反対称関数}} \Leftrightarrow f(y,x) = -f(x,y)$$

♡ ２変数関数の対称性も、変換に関する不変性により理解することができる。例えば、関数 f に対し、関数 Pf を

$$(Pf)(x,y) = f(y,x)$$

で定めれば、

$$f \text{ が対称関数} \Leftrightarrow Pf = f$$
$$f \text{ が反対称関数} \Leftrightarrow Pf = -f$$

♡ $z = (Pf)(x,y)$ のグラフは元の関数のグラフの平面 $y = x$ に関する鏡映像になる。

量子力学

♡　元素や素粒子などミクロの世界を記述する物理学

特徴（A）
同種の粒子は区別できない。

特徴（B）
ある粒子が位置 x に存在する確率は

$$|f(x)|^2$$

で与えられる。ここで、$f(x)$ は $\boxed{\text{波動関数}}$ と呼ばれる関数。

特徴（C）
同様に、２つの粒子がそれぞれ位置 x, y に存在する確率は

$$|f(x, y)|^2$$

で与えられる。ここで、$f(x, y)$ は位置 x, y を定めるごとに定まる数で、やはり波動関数と呼ばれる。

『定理』　同種の粒子が２つあるとき、その波動関数は対称関数か反対称関数であるかのいずれかである。すなわち、次のいずれかが成り立つ。

$$f(x, y) = f(y, x) \tag{1}$$

$$f(x, y) = -f(y, x) \tag{2}$$

『証明』

特徴（A）より

$$|f(x,y)|^2 = |f(y,x)|^2$$

である。

したがって、

$$f(x,y) = sf(y,x) \tag{3}$$

と書いておけば、

$$|s| = 1$$

である。一方、式 (3) を２回用いれば、

$$f(x,y) = sf(y,x) = s^2 f(x,y)$$

となるので、

$$s^2 = 1$$

ゆえに

$$s = \pm 1$$

$\square$

注：上の『証明』は数学的に厳密ではない。実際、『定理』の反例を作ることは難しくない。

定義　上の『定理』で $f(x,y)$ が対称関数であるとき、その粒子は $\boxed{\text{ボース粒子}}$ であるといい、反対称関数であるとき、その粒子は $\boxed{\text{フェルミ粒子}}$ であるという。

パウリの排他原理

同種のフェルミ粒子は、同じ位置に二つ重ねることはできない。
(ボース粒子は二つ重ねることが可能)

『証明』 $f(x, y)$ は上と同様とする。同種のフェルミ粒子が共に位置 x に存在する確率は $|f(x, x)|^2$ で与えられる。一方、反対称関数の定義式

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

で $x = y$ とすれば、

$$f(x, x) = -f(x, x)$$

となるから、$f(x, x) = 0$ がわかる。 □

フェルミ粒子の例 電子、陽子、中性子、ニュートリノ

ボース粒子の例 光子、中間子、電子のクーパー対

フェルミ粒子に関連する現象
元素の周期律表、中性子星

ボース粒子に関連する現象
超伝導、レーザー

一般線形変換

♡　２変数関数 $z = f(x, y)$ に対し、原点の周りの回転や、変数の置換、伸張変換を含む、より一般の変換を考える。

定義　４つの数 a, b, c, d よりなるデータ $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ であって、条件 $ad - bc \neq 0$ を満たしているものの全体を $GL(2)$ で表す。また、このような A に対し、関数 $S_A f$ を

$$(S_A f)(x, y) = f(ax + cy, bx + dy)$$

により定める。変換 S_A を $\boxed{\text{一般線形変換}}$ と呼ぶ。

注：$GL(2)$ は行列の積により、群になる。さらに

$$S_A \times S_B = S_{AB}$$

が成り立つ。すなわち、

$$(S_A(S_B f))(x, y) = (S_{AB} f)(x, y)$$

が成り立つ。

定義　（１）式 $x^2, x^2 y, y^2$ を変数 x, y の $\boxed{\text{２次単項式}}$ という。同様に $x^3, x^2 y, xy^2$, y^3 を $\boxed{\text{３次単項式}}$ という。
（２）　$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ のように、２次単項式 の定数倍の和で表される２変数関数を $\boxed{\text{２次斉次多項式}}$ とよぶ。同様に ３次単項式 の定数倍の和で表される２変数関数を $\boxed{\text{３次斉次多項式}}$ とよぶ。

定理　$f(x,y)$ が２次斉次多項式であれば、その一般線形変換 $(S_A f)(x,y)$ も２次斉次多項式になる。３次斉次多項式に対しても同様のことがいえる。

証明　例えば、$f(x,y)=xy$ のときは

$$\begin{aligned}(S_A f)(x,y) &= (ax+cy)(bx+dy)\\ &= abx^2+(ad+bc)xy+cdy^2\end{aligned}$$

$\square$

♡　上の事実を、『２次（または３次）斉次多項式の全体は $GL(2)$ の作用に関して閉じている』、または、『２次（または３次）斉次多項式の全体は $GL(2)$ の $\boxed{\text{表現}}$ である』という。

♡　２次単項式は３個あるから『２次斉次多項式の全体は３次元の表現』であるという。また、３次単項式は４個あるから『３次斉次多項式の全体は４次元の表現』であるという。

♡　上と同様に、３変数関数 $w=f(x,y,z)$ と９つの数よりなるデータ

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}$$

に対しても、関数 $S_A f$ や 群 $GL(3)$ が定義される。さらに、１０個の３次単項式

$$\begin{array}{ccccccc} & & & z^3 & & & \\ & & yz^2 & & xz^2 & & \\ & y^2z & & xyz & & x^2z & \\ y^3 & & xy^2 & & x^2y & & x^3\end{array}$$

から $GL(3)$ の『１０次元の表現』が定義される。

クォーク

♡ ゲルマン　　陽子や中性子（などの重粒子）はより基本的な素粒子であるクォーク ３個よりなる。さらに重粒子達は $SU(3)$ の表現を形成する。（ある意味で。）

Ω^-

Ξ^{*-}　Ξ^{*0}　　　　　　Ξ^-　Ξ^0

Σ^{*-}　Σ^{*0}　Σ^{*+}　　　　　　Σ^-　Σ^0, Λ^0　Σ^+

Δ^-　Δ^0　Δ^+　Δ^{++}　　　　　　n　p

$x \leftrightarrow$ アップクォーク,　$y \leftrightarrow$ ダウンクォーク

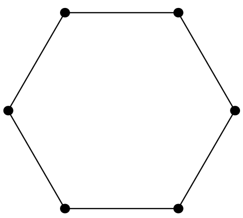
$z \leftrightarrow$ ストレンジクォーク

注：素粒子論の一般向け解説書には、 $SU(2)$ と呼ばれる群が登場することがある。この群の『表現論』は $GL(2)$ の『表現論』とよく似ており、とりあえず、両者は同じものと思っても良い。$SU(3)$ と $GL(3)$ についても同様である。

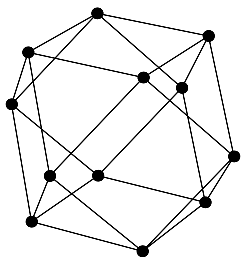
♡ 実は、$GL(2), GL(3)$ などの表現はルート系と呼ばれる『正多面体』（の低高次元板）により記述される。

プラトンは正しかった !!!

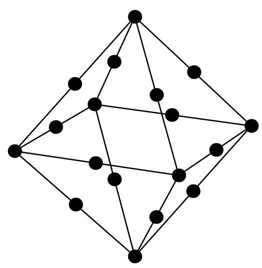
ルート系の例

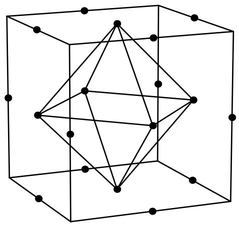


$GL(3)$



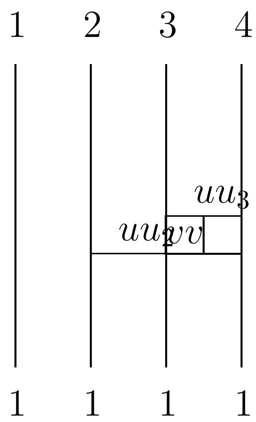
$GL(4)$





$SO(7)$

置換とその符号



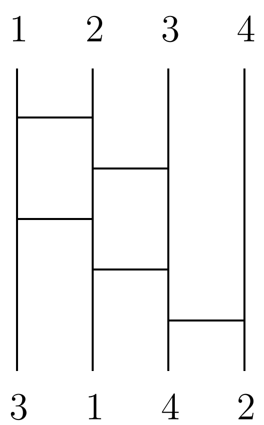
定理　**2つのあみだくじ A、 B は同じ置換を表すものとする。このとき、**

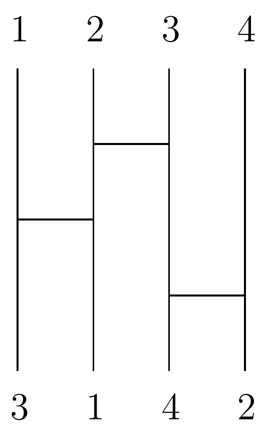
$$A \text{ の横線の数が偶数} \Leftrightarrow B \text{ の横線の数が偶数}$$

$$A \text{ の横線の数が奇数} \Leftrightarrow B \text{ の横線の数が奇数}$$

である。

例





サム・ロイドの懸賞問題（１８７８年）

左の状態の「１５パズル」を右の状態にせよ。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\underset{?}{\longrightarrow}$$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

♡ **実は、この問題には解がない。**

証明

ネーターの定理

連続的対称性

$\Longleftrightarrow$

保存法則

例

時間不変性 $\Longleftrightarrow$ エネルギー保存の法則
並進不変性 $\Longleftrightarrow$ 運動量保存の法則
回転不変性 $\Longleftrightarrow$ 角運動量保存の法則

命題

『２次方程式 $f(X)=aX^2+bX+c=0$ が異なる２実解をもつ』という性質は並進不変

命題

２次方程式 $f(X)=aX^2+bX+c=0$　変数変換 $X=X'+q$ により得られる２次方程式を $f'(X')=0$ とする。$f(X)$ の判別式と $f'(X')$ の判別式は等しい。

♡ ２次方程式の性質を保つ変数変換

実は『２次方程式が異なる２実解をもつ』という性質を保つ変数変換は、他にもあります。例えば、$X=2X'$ と置けば、

$$f(X)=4a(X')^2+2bX'+c=0$$

$X=\dfrac{1}{X'}$

$c(X')^2+bX'+a$

実は２次方程式の背後には、もう少し高い対称性があります。唐突ではありますが、次のような変数変換を考えてみましょう。

$$X=\frac{pX'+q}{rX'+s}$$

例えば、

$$X=\frac{2X'+1}{X'+1}$$

$f(X)=0$ に代入すると

$$a\left(\frac{pX'+q}{rX'+s}\right)^2+b\left(\frac{pX'+q}{rX'+s}\right)+c=0$$

両辺に $(rX'+s)^2$ を書けて

$$a\left(pX'+q\right)^2+b(pX'+q)(rX'+s)+c(rX'+s)^2=0 \quad (4)$$

整理すれば $f'(X')=0$ が得られます。ただし、$f'(X')=a'(X')^2+b'X'+c'$

$$\begin{aligned}a'&=ap^2+bpr+cr^2\\ b'&=2apq+bqr+bps+2crs\\ c'&=aq^2+bqs+cs^2\end{aligned}$$

ねばり強く計算すれば、$f'(X')=0$ の判別式 $D'=(b')^2-4a'c'$ は

$$D'=(ps-qr)\times D$$

定理

2 次多項式 $f(X)=0$ $f'(X')=0$ (??) により定めるとき、$ps-qr\neq 0$

♡ 『分母 $=0$ 問題』の処方箋