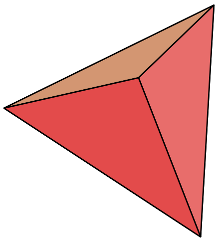
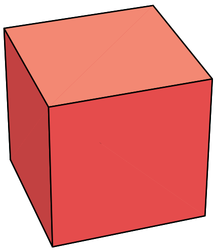
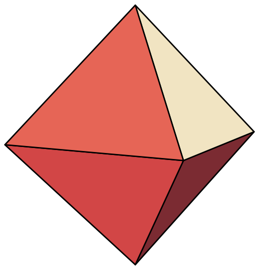
プラトンの多面体



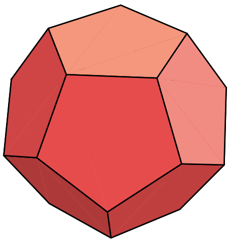
正四面体



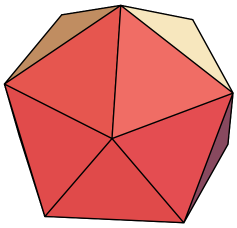
正六面体



正八面体

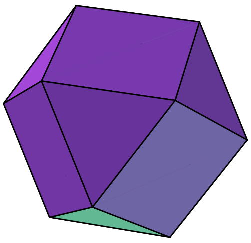


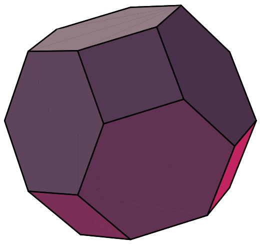
正十二面体

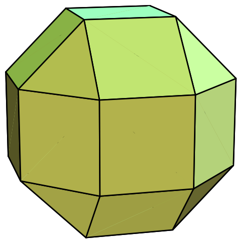


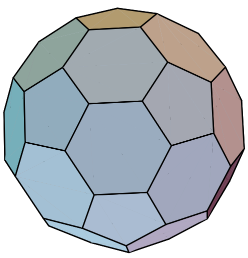
正二十面体

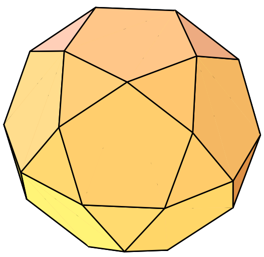
準正多面体の例

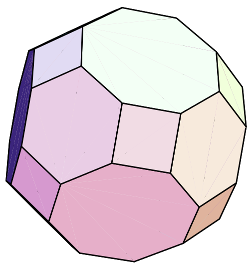




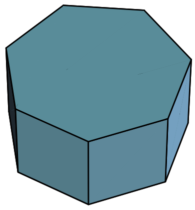




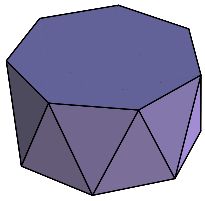




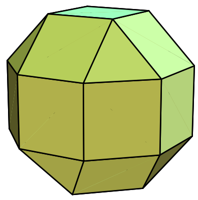
準正多面体に準ずる多面体



正７角柱

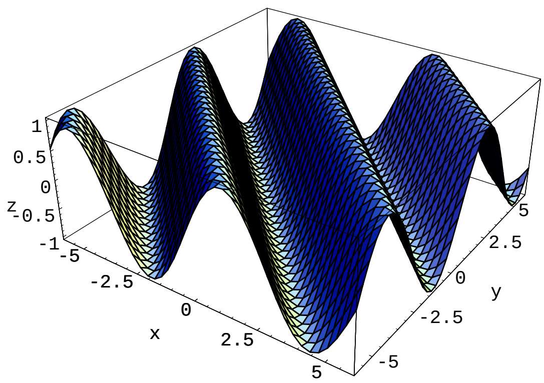


正７角反柱

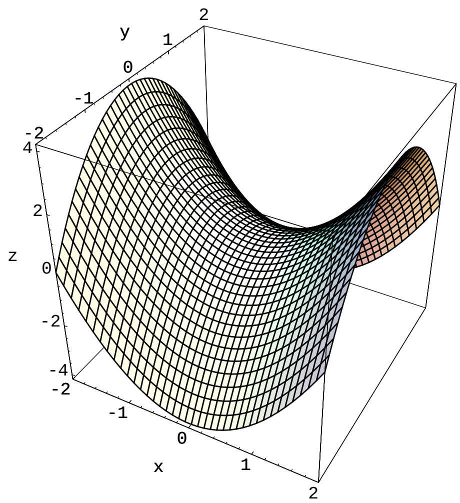


ミラーの多面体

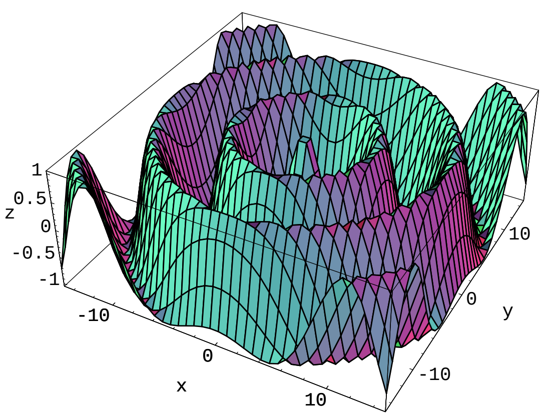
対称性を持つ２変数関数の例



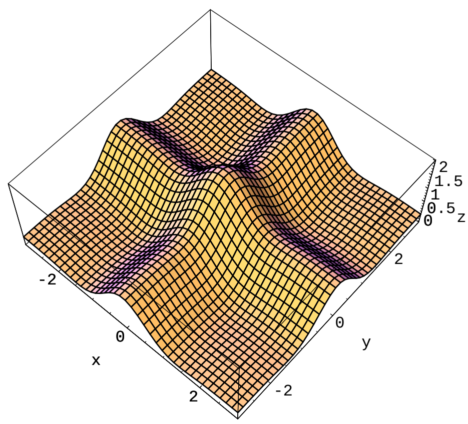
$z = \sin(x + y)$



$z = x^2 - y^2$



$z = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$



$z = e^{-x^2}(1 - x^2) + e^{-y^2}(1 - y^2)$

数学アゴラ
2008年8月6日

正多面体と群（１日目）

林孝宏

正多面体

♡ 正多面体と元素（プラトン）

$$
\begin{aligned}
\text{正４面体} &\Longleftrightarrow \text{火}\\
\text{正６面体} &\Longleftrightarrow \text{土}\\
\text{正８面体} &\Longleftrightarrow \text{空気}\\
\text{正２０面体} &\Longleftrightarrow \text{水}\\
\text{正１２面体} &\Longleftrightarrow \text{全宇宙？エーテル？}
\end{aligned}
$$

♡ 水の沸騰の化学反応式

$$F_4 + W_{20} \to 2A_8 + 2F_4$$

♡ ピタゴラス

$\boxed{\text{万物は数なり}}$

♡ ケプラー　　惑星の軌道半径の比を正多面体で説明しようとした。さらに次のように考えた。

正８面体 $\Longleftrightarrow$ 水星
正２０面体 $\Longleftrightarrow$ 金星
正１２面体 $\Longleftrightarrow$ 火星
正４面体 $\Longleftrightarrow$ 木星
正６面体 $\Longleftrightarrow$ 土星
？ $\Longleftrightarrow$ 地球

♡ 正多面体の面、辺、頂点の数

	面の数	辺の数	頂点の数
正４面体	４	６	４
正６面体	６	１２	８
正８面体	８	１２	６
正１２面体	１２	３０	２０
正２０面体	２０	３０	１２

定義 P は（有限個の面で囲まれた）凸多面体であるとする。このとき、

$$P \text{ が}\boxed{\text{正多面体}} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \text{ 各面はすべて合同な正多角形} \\ (2) \text{ 各頂点はすべて合同な正多角錘} \end{cases}$$

定理 凸多面体 P は上の（１）を満たすとする。このとき次は同値。

（2-0） P は正多面体。
（2-1） P の各頂点は１つの球面上にある。
（2-2） P のすべての２面角は等しい。
（2-3） P の各頂点は同じ数の面で囲まれている。

正多面体の分類

定理

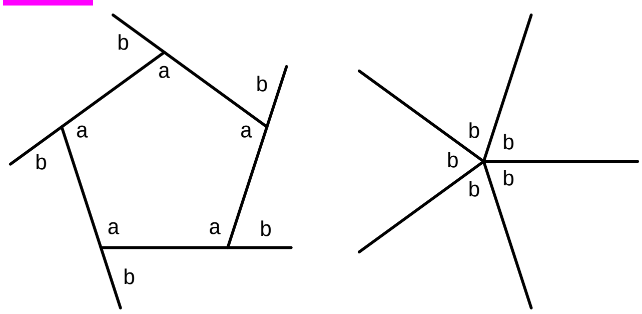
正多面体はちょうど５つ存在する。

（ユークリッド）

♡ **正多面体 P の各面は正 p 角形、各頂点は正 q 角錐であるとする。(p,q) をシュレーフリの記号と呼ぶ。どのような (p,q) が現れうるかを考える。**

補題 **正 p 角形の各内角 a は $\left(1-\frac{2}{p}\right)\times 180^\circ$ に等しい。**

証明



左図より $bp = 360^\circ$
したがって　$a = 180^\circ - b$
はこの式で与えられる。

□

補題 **(p,q) は $(3,3)$、$(4,3)$、$(3,4)$、$(3,5)$、$(5,3)$ のいずれかに等しい。**

証明 **P の１つの頂点での角度の和は、$\left(1-\frac{2}{p}\right)\times 180^\circ \times q < 360^\circ$ だから**

$$\left(1-\frac{2}{p}\right)<\frac{2}{q}$$

であり、したがって

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2} \tag{1}$$

である。一方、定義より、$q \geq 3$ であるから、

$$\frac{1}{p}>\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

である。よって $p \geq 3$ とあわせ、

$$p=3,4,5$$

が得られる。

(i) $p=3$ のとき　不等式 (??) より、

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore \quad q=3,4,5$$

(ii) $p=4$ のとき　同様に

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad q=3$$

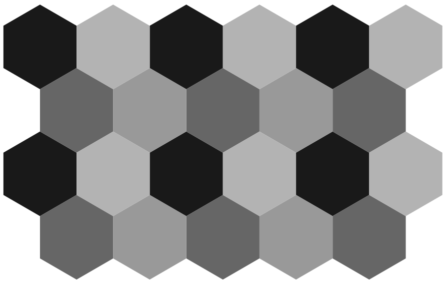
(iii) $p=5$ のとき　同様に

$$\frac{1}{q}>\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad q=3$$

□

問題　大きさの等しい正 p 角形のタイルを無限個用意し、平面上に隙間無く敷き詰めることを考える。p は $3, 4, 6$ のいずれかになることを上と同様の議論により示せ。



準正多面体

定義　P は凸多面体であるとする。このとき、

$$P\ \text{が}\ \boxed{\text{準正多面体}} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \text{各面は正多角形} \\ (2)\ \text{辺の長さはすべて等しい} \\ (3)\ \text{各頂点はすべて合同な多角錘} \end{cases}$$

ただし、正多角柱や正多角反柱および、ミラーの多面体は除外する。(「３次元的な」対称性を持たないから !?）

定理

準正多面体は全部で１３種類存在する。
(ただし、鏡映像を別と考えれば、１５種類)

多面体の対称性

l を3次元空間の直線とする。多面体 P を l を中心として角度 θ だけ回転させることを考える。

定義 （1） l のまわりの $360°/n$ の回転で P が不変であるとき、この回転は P の $\boxed{\text{回転変換}}$ であるという。また、l は P の $\boxed{n(\text{回対称})\text{軸}}$ であるという。
（2） 回転変換の全体を $G(P)$ で表す。
ただし、$G(P)$ の各点を全く動かさない変換も P の回転変換であるとする。この変換を $\boxed{\text{恒等変換}}$ と呼び、I で表す。

定理 （1） 回転変換の軸 l は $G(P)$ の重心を通る。
（2） 回転変換の軸 l と $G(P)$ の表面との交わりは、ある面の重心であるか、ある辺の中点であるか、ある頂点であるかのいずれかである。

多面体の n 軸の数

	2軸	3軸	4軸	5軸	$\cdots$	p 軸	$\cdots$	回転の総数
正4面体	3	4						12
正6（8）面体	6	4	3					24
正12（20）面体	15	10		6				60
正 p 角柱	p					1		$2p$
正 p 角錐						1		p

♡ 回転の総数の数え方。（正6面体の場合）

$$1 + (2-1)\times 6 + (3-1)\times 4 + (4-1)\times 3 = 24$$

定理　多面体 P に対し、$G(P)$ は次のいずれかちょうどひとつに一致する。

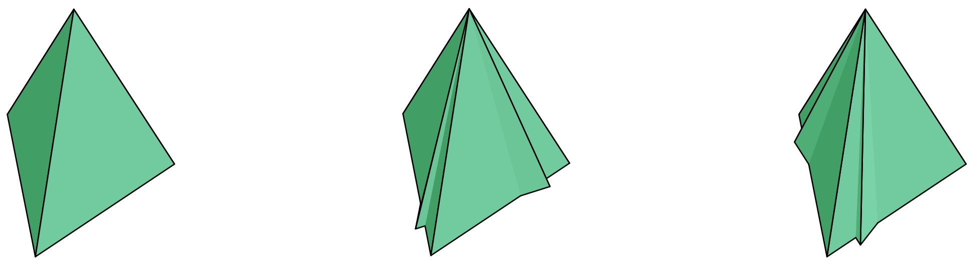
$$G(\text{正４面体}),\ G(\text{正６面体}),\ G(\text{正１２面体}),$$
$$G(\text{正}\,p\,\text{角柱}),\ G(\text{正}\,p\,\text{角錐}),$$
$$G(\text{でたらめな多面体})$$

例

$$G(\text{正６面体}) = G(\text{正８面体})$$
$$G(\text{正１２面体}) = G(\text{正２０面体})$$
$$G(\text{サッカーボール}) = G(\text{正１２面体})$$
$$G(\text{ミラーの多面体}) = G(\text{正４角柱})$$

鏡映像

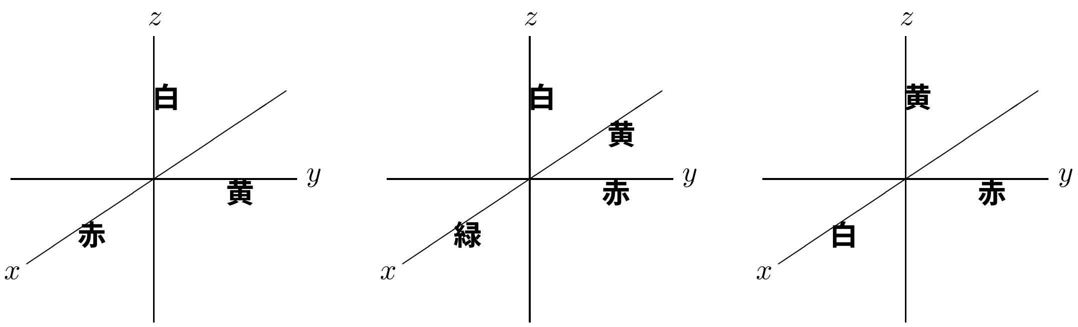
空間に平面 M を用意し、M に関する図形 P の鏡映像 P' を考える。P と P' はそもそも合同とは限らない。（鏡像異性体。）



P と P' が一致しているときには P の各点をその鏡映像に写す $\boxed{\text{鏡映変換}}$ が定義できる。

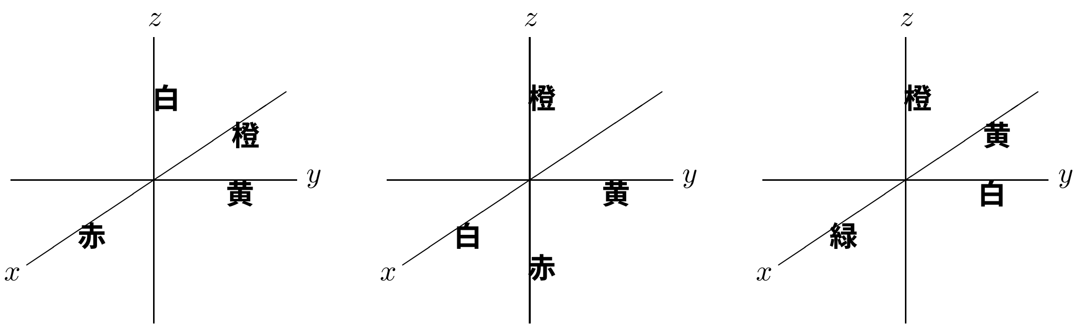
変換の合成と群

♡　**正６面体に対し、４軸の周りの 90° 回転を２度実行してみる。**



結果はある３軸の周りの回転に一致する。

♡　**回転を実行する順序を逆にすれば、異なる３軸の周りの回転が得られる。**



定義　P **を多面体とし、**A, B **を** $G(P)$ **に含まれる変換とする。このとき、**A **を実行した後に、**B **を実行することで得られる変換を**

$$A \times B$$

で表す。

注　**正６面体の例からわかるように、一般に**

$$A \times B \neq B \times A$$

である。

定理　（1）　$A \times B$ は $G(P)$ に含まれるある回転に一致する。
（2）　次が成り立つ。（A^{-1} は A の逆回転を表す。）

（群１）　$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

（群２）　$I \times A = A = A \times I$

（群３）　$A \times A^{-1} = I = A^{-1} \times A$

定義　$G(P)$ に含まれる回転を一列に並べたものを $A_1, A_2, \ldots, A_n$ とする。n 行 n 列の表を作り、その第 i 行の j 番目の位置に $A_i \times A_j$ を書き込んだものを $G(P)$ の $\boxed{\text{乗積表}}$ （九九）という。

例　G(正３角柱) の乗積表

	I	$120°$	$240°$	A	B	C
I	I	$120°$	$240°$	A	B	C
$120°$	$120°$	$240°$	I	C	A	B
$240°$	$240°$	I	$120°$	B	C	A
A	A	B	C	I	$120°$	$240°$
B	B	C	A	$240°$	I	$120°$
C	C	A	B	$120°$	$240°$	I

定理　多面体 P、 Q に対し、$G(P)$ と $G(Q)$ が一致するかどうかは、乗積表だけで判定できる。（回転軸の方向は調べなくても良い。）

定義　一般に集合 G 上に上述の条件（群１）、（群２）、（群３）を満たす演算 $\times$ が与えられているとき、G は $\boxed{\text{群}}$ であるという。